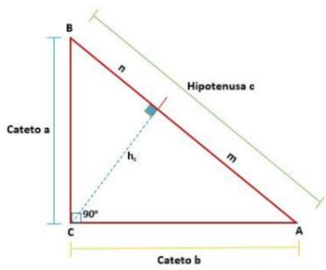
Módulo de aprendizaje N° 23
Tema: Teorema de Euclides

Objetivo: Aplicar el teorema de Euclides en el triángulo rectángulo para determinar trazos proporcionales

Instrucciones: Lee prestando mucha atención y sigue paso a paso las indicaciones para entender y ejercitar el cálculo de ejercicios del teorema de Euclides

Teorema de Euclides:



El teorema de Euclides demuestra las propiedades de un triángulo rectángulo al trazar una línea que lo divide en dos nuevos triángulos rectángulos que son semejantes entre si y, a su vez, son semejantes al triángulo original; entonces, existe una relación de proporcionalidad.

Se explica de forma sencilla las relaciones geométricas existentes en el triángulo rectángulo, donde los catetos de este están relacionados con sus proyecciones en la hipotenusa.

El teorema de Euclides propone que, en todo triángulo rectángulo, cuando se traza una recta que representa a la altura que corresponde al vértice del ángulo recto con respecto a la hipotenusa, se forman dos triángulos rectángulos a partir del original.

Estos triángulos serán semejantes entre si y también serán semejantes con el triángulo original, lo que significa que sus lados semejantes son proporcionales entre sí.

Los ángulos de los tres triángulos son congruentes; es decir, que al ser rotados a 180° sobre su vértice, coincide un ángulo sobre el otro. Esto implica que todos serán iguales.

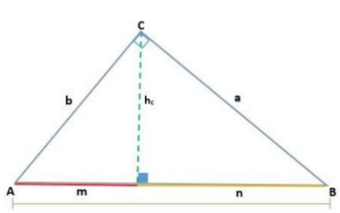
De esta forma también se puede verificar la semejanza que existe entre los tres triángulos, por la igualdad de sus ángulos. Desde la semejanza de triángulos, Euclides establece las proporciones de estos a partir de dos teoremas:

- Teorema de la altura
- Teorema de los catetos

1. Teorema de la altura:

En este teorema se establece que, en cualquier triángulo rectángulo, la altura trazada desde el ángulo recto con respecto a la hipotenusa es la media proporcional geométrica (el cuadrado de la altura) entre las proyecciones de los catetos que determina sobre la hipotenusa:

$hc^2 = \mathrm{m} \cdot \mathrm{n}$

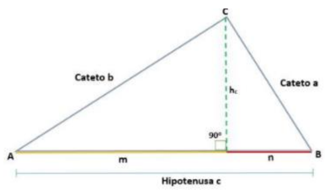


2. Teorema de los catetos:

En este teorema se establece que, en todo triángulo rectángulo, la medida de cada cateto sera la media proporcional geométrica (el cuadrado de cada cateto) entre la medida de la hipotenusa (completa) y la proyección de cada uno sobre este:

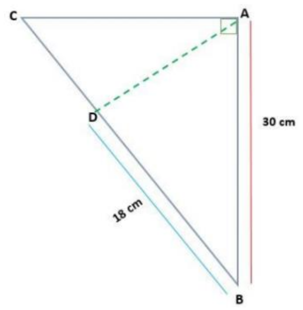
$b^2 = \mathrm{c} \cdot \mathrm{m}$

$a^2 = \mathrm{c} \cdot \mathrm{n}$



Ejemplificación:

Dado el triángulo ABC, rectángulo en A, determinar la medida de AC y AD, si AB = 30 cm y BD = 18 cm



En este caso se tienen las medidas de uno de los catetos proyectados BD y de uno de los catetos del triángulo original AB. De esta forma se puede aplicar el teorema de los catetos para hallar el valor del cateto BC

AB^2 = BD · BC

30^2 = 18 · BC

900 = 18 · BC

BC = $\frac{900}{18}$ = 50 cm

BC = 50 cm

El valor del cateto CD puede ser hallado sabiendo que BC = 50

CD = BC – BD

CD = 50 – 18 = 32 cm

CD = 32 cm

Ahora si es posible determinar el valor del cateto AC, aplicando nuevamente el teorema de los catetos:

AC^2 = CD · BC

AC^2 = 32 · 50

AC^2 = 1600

AC = 40 cm

Para determinar el valor de la altura AD se aplica el teorema de la altura, ya que los valores de los catetos proyectados CD y BD son conocidos:

AD^2 = 32 · 18

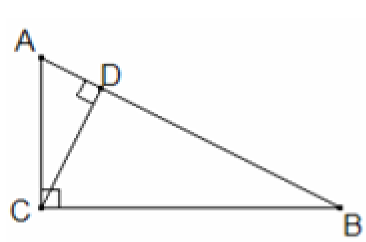
AD^2 = 576

AD = 24 cm

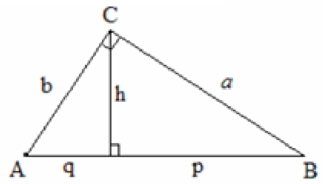
Ejercitación:

Desarrolla los siguientes ejercicios aplicando el teorema de Euclides:

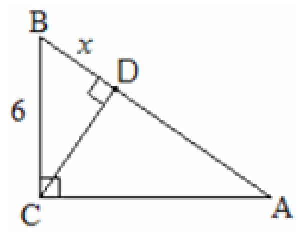
a) En el triángulo ABC rectángulo en C, BD = 15 cm y AB = 20 cm, entonces la medida de BC es:



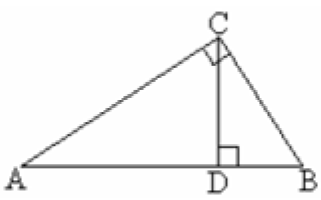
b) En el triángulo rectángulo en C, que se presenta en este ejercicio, q = 12 cm y p = 4 cm. Mientras la medida del lado a es:



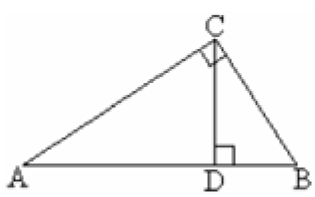
c) Si AB mide 9 cm y con la información entregada en el triángulo rectángulo ABC, ¿Cuánto mide x?



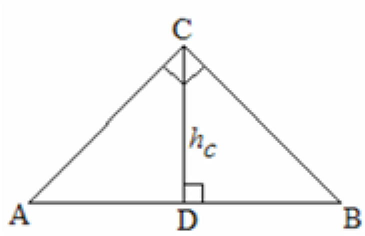
d) En el triángulo rectángulo de la figura, BC = 5 cm y DB = 4 cm, entonces, ¿AD =?



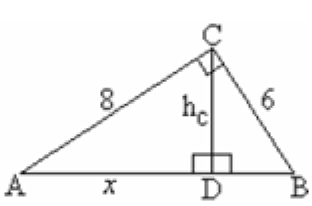
e) En el triángulo ABC rectángulo en C, AD = 15 cm y AB = 20 cm, entonces, la medida de AC es:



f) El triángulo ABC es isósceles y rectángulo en C, si BC = $2\sqrt{2}$, entonces, AD + DC =



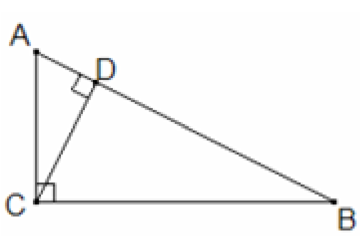
g) El triángulo ABC es rectángulo en C. Entonces, la medida de x es:



Corrección:

Desarrolla los siguientes ejercicios aplicando el teorema de Euclides:

a) En el triángulo ABC rectángulo en C, BD = 15 cm y AB = 20 cm, entonces la medida de BC es:



Aplicando el teorema de los catetos tenemos:

$15 \cdot 20 = BC^2$

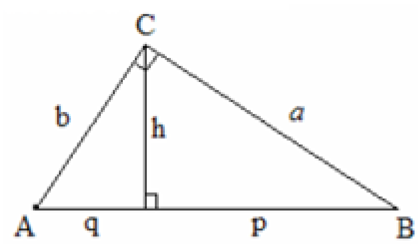
$300 = BC^2$

BC = $\sqrt{300}$

BC = $10\sqrt{3}$

BC = $10\sqrt{3}$ cm

b) En el triángulo rectángulo en C, que se presenta en este ejercicio, q = 12 cm y p = 4 cm. Mientras la medida del lado a es:



Aplicando el teorema de los catetos tenemos:

$a^2 = p \cdot (p + q)$

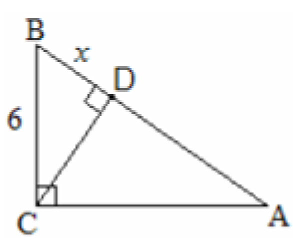
$a^2 = 4 \cdot 16$

$a^2 = 64$

a = $\sqrt{64}$

a = 8 cm

c) Si AB mide 9 cm y con la información entregada en el triángulo rectángulo ABC, ¿Cuánto mide x?



Aplicando el teorema de los catetos tenemos:

$6^2 = x \cdot 9$

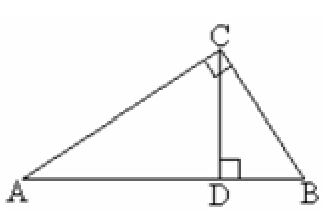
36 = 9 x

$\frac{36}{9} = x$

4 = x

x = 4 cm

d) En el triángulo rectángulo de la figura, BC = 5 cm y DB = 4 cm, entonces, ¿AD =?



Aplicando el teorema de los catetos tenemos:

$5^2 = 4 \cdot (x + 4)$

25 = 4 x + 16

25 – 16 = 4 x

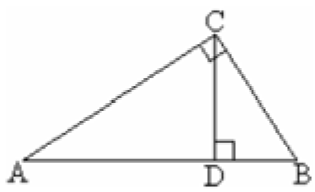
9 = 4 x

$x = \frac{9}{4}$

x = 2,25 cm

AD = 2,25 cm

e) En el triángulo ABC rectángulo en C, AD = 15 cm y AB = 20 cm, entonces, la medida de AC es:



Aplicando el teorema de los catetos tenemos:

x^2 = 15 · 20

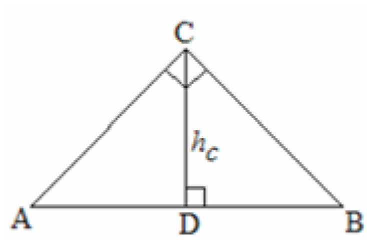
x^2 = 300

x = $\sqrt{300}$

x = $10\sqrt{3}$

AC = $10\sqrt{3}$ cm

f) El triángulo ABC es isósceles y rectángulo en C, si BC = $2\sqrt{2}$, entonces, AD + DC =



Aplicando el teorema de Pitágoras calculamos el valor de AB:

$(2\sqrt{2})^2 + (2\sqrt{2})^2 = AB^2$

8 + 8 = AB^2

16 = AB^2

AB = $\sqrt{16}$

AB = 4 cm

Aplicando el teorema de los catetos tenemos:

$(2\sqrt{2})^2$ = AD · 4

8 = AD · 4

AD = 2

AD = 2 cm

Aplicando el teorema de la altura tenemos:

DC^2 = AD · DB

DC^2 = 2 · 2

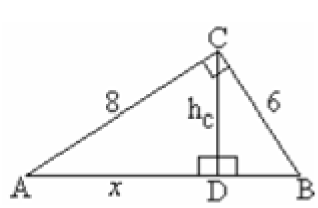
DC^2 = 4

DC = 2 cm

Ahora AD + DC:

AD + DC = 2 + 2 = 4 cm

g) El triángulo ABC es rectángulo en C. Entonces, la medida de x es:



Aplicando el teorema de Pitágoras tenemos:

$8^2 + 6^2 = AB^2$

$64 + 36 = AB^2$

$100 = AB^2$

AB = $\sqrt{100}$

AB = 10 cm

Para calcular x tenemos que aplicar el teorema de los catetos:

$8^2 = x \cdot AB$

$64 = x \cdot 10$

$\frac{64}{10} = x$

x = 6,4 cm

Autoevaluación:

Finalmente responde esta autoevaluación marcando la opción que corresponda luego de haber revisado tus respuestas:

Indicador	Si, correctamente logrado	Medianamente logrado	No lo logre
¿Apliqué correctamente el teorema de Euclides?			
¿Calculé correctamente los problemas aplicando el teorema de Euclides?			
¿Apliqué correctamente el teorema de la altura?			
¿Apliqué correctamente el teorema de los catetos?			

Síntesis:

Para continuar trabajando el teorema de Euclides puedes visitar la siguiente página:

https://www.youtube.com/watch?v=4d3L9GrLGJ4&ab_channel=SusiProfe