Módulo de autoaprendizaje Nº26

Tema: Propiedades de la probabilidad.

Objetivo: Comprender las propiedades de la probabilidad en sucesos aleatorios.

Definición:

A partir de los axiomas anteriores se pueden deducir algunas propiedades importantes de la probabilidad. Estas propiedades van a ser útiles para calcular la probabilidad de sucesos a partir de las probabilidades conocidas de otros sucesos más sencillos, simplificando así el cálculo. Hay que indicar además que estas propiedades son consistentes con las propiedades de las frecuencias relativas

- Si A" es el suceso complementario de A, entonces

$P(A")=1-P(A)$.

Efectivamente, puesto que $A \cup A" = S$ y teniendo en cuenta que A y su complementario son incompatibles ($A \cap A" = \emptyset$)

$P(A \cup A")=P(S) \Rightarrow P(A)+P(A")= 1$

- La probabilidad del suceso imposible es cero

$P(\emptyset) = 0$.

Se demuestra a partir de la propiedad anterior y teniendo en cuenta que el suceso imposible es el complementario del suceso seguro ($\emptyset" = S$)

$P(\emptyset) = 1-P(S)=1-1=0$.

- A partir del primer axioma y la propiedad anterior, se puede ver que para cualquier suceso A

$0 \leq P(A) \leq 1$.

- Si un suceso A está contenido en otro B, se cumple (por definici´on de un suceso contenido en otro)

$A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$

- Si A y B son dos sucesos cualesquiera, siempre se cumple

$P(A \cup B)=P(A)+P(B)-P(A \cap B)$.

En el caso particular de que los sucesos fuesen incompatibles ($A \cap B = \emptyset$) esta propiedad se reduciría al tercer axioma de la probabilidad.

Para demostrar esta propiedad hacemos uso del diagrama de Venn (Figura 5.2), en el cual es f´acil de comprobar que se verifica

$A =(A \cap S)=(A \cap (B \cup B"))=(A \cap B) \cup (A \cap B")$.

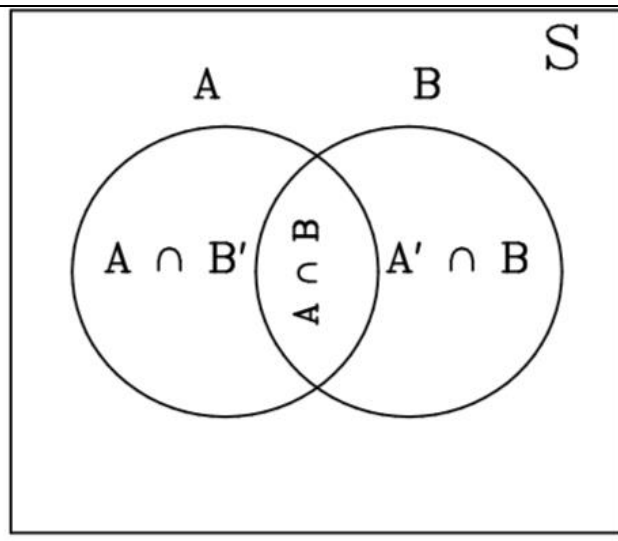

Figura 5.2: *Diagrama de Venn representando la probabilidad de un suceso unión de dos sucesos no incompatibles.*

De la misma forma

$B =(A\cap B)\cup(A"\cap B)$

.

Por tanto

$A\cup B =(A\cap B)\cup(A\cap B")\cup(A"\cap B)$.

Puesto que en cada una de las expresiones anteriores, los sucesos del término de la derecha son incompatibles entre sí, usando el tercer axioma podemos escribir

$P(A)=P(A\cap B)+P(A\cap B") \Rightarrow P(A\cap B")=P(A)-P(A\cap B)$
$P(B)=P(A\cap B)+P(A"\cap B) \Rightarrow P(A"\cap B)=P(B)-P(A\cap B)$
$P(A\cup B)=P(A\cap B)+P(A\cap B")+P(A"\cap B)$

Sustituyendo las dos primeras expresiones en la tercera

$P(A\cup B)=P(A\cap B)+P(A)-P(A\cap B)+P(B)-P(A\cap B)=$
$= P(A)+P(B)-P(A\cap B)$,

Como queríamos demostrar.
La propiedad anterior se puede generalizar a la unión de más de dos sucesos. En el caso de tres sucesos cualesquiera tendríamos

$P(A\cup B\cup C)=$
$= P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)-P(B\cap C)-P(C \cap A)+P(A\cap B\cap C)$

Ejemplo:

a.

En el caso del lanzamiento de un dado,
A: obtener un 6 $\quad P(A) = 1/6$
A': que no salga un 6 $\quad P(A') = 1 - P(A) = 1 - (1/6) = 5/6$.
Lo que ya sabíamos ya que éste es el cociente entre casos favorables (5) y posibles (6).

b.

Calcular la probabilidad de obtener o un número par o un número mayor que 3 en el lanzamiento de un dado.

A : obtener un número par P(A) = 3/6 = 1/2 {2,4,6}

B : obtener un número mayor que 3 P(B) = 3/6 = 1/2 {4,5,6}

$$P(A \cap B) = 2/6 \qquad ; \qquad (\{4,6\} \textit{ es el espacio muestral})$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{2}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

que era lo esperado ya que el espacio muestral es en este caso $\{2,4,5,6\}$, es decir, $4/6 = 2/3$.

1.- Ahora hazlo tú.

I. Sean A y B dos sucesos aleatorios con

$$P(A) = \frac{3}{8}, \qquad P(B) = \frac{1}{2}, \qquad P(A \cap B) = \frac{1}{4}$$

Hallar:

1 $P\left(A \cup B\right)$

2 $P\left(\overline{A}\right)$

3 $P\left(\overline{B}\right)$

4 $P\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right)$

5 $P\left(A \cap \overline{B}\right)$

6 $P\left(\overline{A} \cup \overline{B}\right)$

7 $P\left(B \cap \overline{A}\right)$

2.- Revisa los resultados obtenidos

I. $P\left(A \cup B\right)$

Los sucesos son compatibles porque la intersección es distinta del vacío, $A \cap B \neq \emptyset$, dado que su probabilidad no es nula. Por lo tanto

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= \frac{3}{8} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \\ &= \frac{5}{8} \end{aligned}$$

2 $P\left(\overline{A}\right)$

Las probabilidad de $\overline{A}$ es igual a 1 (probabilidad total) menos la probabilidad del suceso A

$$\begin{aligned} P\left(\overline{A}\right) &= 1 - P(A) \\ &= 1 - \frac{5}{8} \\ &= \frac{3}{8} \end{aligned}$$

3 $P\left(\overline{B}\right)$

La probabilidad de $\overline{B}$ es igual a 1 (probabilidad total) menos la probabilidad del suceso B

$$\begin{aligned} P\left(\overline{B}\right) &= 1 - P(B) \\ &= 1 - \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

4 $P\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right)$

Aplicando las leyes de Morgan obtenemos

$$\overline{A} \cap \overline{B} = \overline{A \cup B}$$

Además, la probabilidad de $\overline{A \cup B}$ es igual a 1 (probabilidad total) menos la probabilidad del suceso $A \cup B$, por lo tanto

$$
\begin{aligned}
P\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) &= P\left(\overline{A \cup B}\right) \\
&= 1 - P\left(A \cup B\right) \\
&= 1 - \frac{5}{8} \\
&= \frac{3}{8}
\end{aligned}
$$

5 $P\left(A \cap \overline{B}\right)$

Notemos que $A \cap \overline{B} = A - B$. Aplicando la probabilidad de la diferencia de sucesos tenemos

$$
\begin{aligned}
P\left(A \cap \overline{B}\right) &= P\left(A - B\right) \\
&= P\left(A\right) - P\left(A \cap B\right) \\
&= \frac{3}{8} - \frac{1}{4} \\
&= \frac{1}{8}
\end{aligned}
$$

6 $P\left(\overline{A} \cup \overline{B}\right)$

Aplicando las leyes de Morgan obtenemos

$$\overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A \cap B}$$

Además, la probabilidad de $\overline{A \cap B}$ es igual a 1 (probabilidad total) menos la probabilidad del suceso $A \cap B$, por lo tanto

$$
\begin{aligned}
P\left(\overline{A} \cup \overline{B}\right) &= P\left(\overline{A \cap B}\right) \\
&= 1 - P\left(A \cap B\right) \\
&= 1 - \frac{1}{4} \\
&= \frac{3}{4}
\end{aligned}
$$

7 $P\left(B \cap \overline{A}\right)$

Notemos que $B \cap \overline{A} = B - A$. Aplicando la probabilidad de la diferencia de sucesos tenemos

$$\begin{aligned} P\left(B \cap \overline{A}\right) &= P\left(B - A\right) \\ &= P\left(B\right) - P\left(B \cap A\right) \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

3.- Finalmente responde esta autoevaluación marcando la opción que corresponda luego de haber revisado tus respuestas.

Indicador	Sí	No
¿Identifique correctamente los elementos del evento?		
¿Utilice correctamente las propiedades de probabilidad?		
¿El resultado obtenido es correcto?		