Módulo de autoaprendizaje Nº28
Tema: Variable aleatoria continua.

Objetivo: Aplicar la definición de variable aleatoria continua en enunciados.

Definición:

Veamos ahora el caso de las variables aleatorias continuas, es decir, aquellas que pueden tomar cualquier valor en un intervalo (a, b), o incluso $(-\infty, \infty)$. En este caso, la probabilidad de que la variable X tome un valor determinado dentro de ese intervalo es cero, ya que existen infinitos valores posibles en cualquier intervalo, por pequeño que sea, alrededor del valor en cuestión. Por ejemplo, la probabilidad de que la altura de una persona sea exactamente 1.75 cm, con infinitos ceros en las cifras decimales, es cero. Por tanto no se puede definir una función de probabilidad igual que se hacía para las variables discretas, dando la probabilidad de cada valor de la variable. Lo que se si puede especificar es la probabilidad de que la variable esté en un cierto intervalo. Para ello se define una función $f(x)$ llamada **función de densidad**, o **distribución de probabilidad**, de la variable aleatoria continua X de forma que, para todo x, cumpla

$$f(x) \geq 0 \qquad ; \qquad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1. \tag{6.4}$$

De forma que la probabilidad de que X se encuentre entre dos valores x_1 y x_2 se puede calcular como

$$P(x_1 < X < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\, dx. \tag{6.5}$$

Las tres expresiones anteriores constituyen la definición de la función de densidad. Puede demostrarse que esta definición cumple los axiomas de la probabilidad. Puesto que la probabilidad de que X tome un determinado valor x_0 es nula ($\int_{x_0}^{x_0} f(x)\, dx = 0$), en la expresión anterior es indiferente escribir el signo $<$ ó $\leq$.

Puede observarse que, por la definición (6.4), la representación gráfica de la función de densidad (Figura 6.2) será la de una curva, normalmente continua, que toma siempre valores positivos o nulos, y con área, comprendida entre la curva y el eje x, unidad. De igual forma, por la expresión (6.5), la probabilidad de que la variable tome un valor entre x_1 y x_2 será el área bajo la función de densidad entre las abscisas x_1 y x_2. Esta asociación de probabilidad a área es sumamente útil para el estudio de la distribuciones continuas de probabilidad.

Al igual que para el caso discreto, se puede definir la **función de distribución** $F(x)$ en cada punto x de una variable aleatoria continua como la probabilidad de que la variable X tome un valor inferior a x

$$F(x) = P(X < x). \tag{6.6}$$

Por la definición de función de densidad, ésta se relaciona con la función de distribución por

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt. \tag{6.7}$$

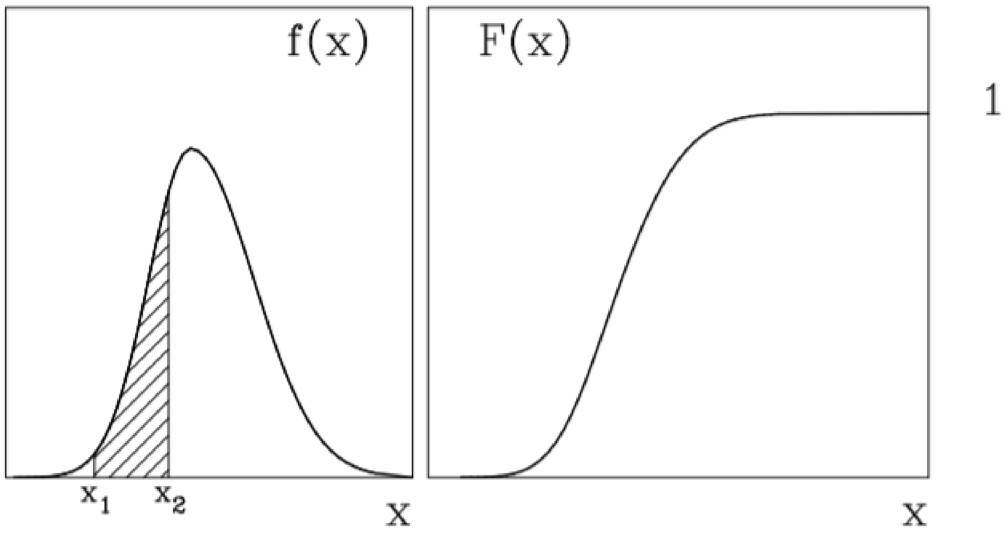

Figura 6.2: *Función de densidad, $f(x)$, y función de distribución, $F(x)$, para una variable aleatoria continua.*

También al igual que en el caso discreto, la probabilidad de que X esté en un cierto intervalo (x_1, x_2) se podrá expresar como

$$P(x_1 < X < x_2) = F(x_2) - F(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\, dx.$$

Si hacemos ese intervalo cada vez más pequeño, tendremos

$$F(x + \Delta x) - F(x) = P(x < X < x + \Delta x) \simeq f(x)\Delta x$$

$$\Rightarrow \quad f(x) = \frac{dF(x)}{dx}.$$

Es decir, la derivada de la función de distribución es la función de densidad.

En general, la función de distribución será una función continua no decreciente que además cumple

$$F(-\infty) = \int_{-\infty}^{-\infty} f(x)\, dx = 0 \quad ; \quad F(\infty) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1.$$

y, por tanto, su representación gráfica será como la mostrada en la Figura 6.2.

Evidentemente, la variable estadística puede que sólo tome valores en un intervalo (a, b). En este caso las integrales infinitas vistas anteriormente se reducen a integrales finitas y se cumple

$$\int_a^b f(x)\, dx = 1 \qquad \text{y} \qquad F(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \int_a^x f(t)\, dt & a < x < b \\ 1 & x > b \end{cases}$$

1.- Ahora hazlo tú.

I. Identifica si corresponde a una variable discreta o continua.

Variable	Tipo de variable
Edades de los estudiantes	
Cantidad de hermanos de una persona	
Número de hijos de una familia	
Altura de los árboles en un parque	
Cantidad de libros en un librero	
Distancia recorrida por un bus	
Ancho de puertas producida en una fabrica	

2.- Revisa los resultados obtenidos

I.

Variable	Tipo de variable
Edades de los estudiantes	Discreta
Cantidad de hermanos de una persona	Discreta
Número de hijos de una familia	Discreta
Altura de los árboles en un parque	Continua
Cantidad de libros en un librero	Discreta
Distancia recorrida por un bus	Continua
Ancho de puertas producida en una fabrica	Continua

3.- Finalmente responde esta autoevaluación marcando la opción que corresponda luego de haber revisado tus respuestas.

Indicador	Sí	No
¿Identifique correctamente si el enunciado es una variable discreta o continua?		